مقدمه‌ای بر روش‌های مختلف ضرب

نویسنده: لین وست[1]
مترجمان: رضا معطی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی ناحیه ۲ اراک
پریسا رحیم‌خانی، دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه الزهرا(س)

چکیده

این نوشته، فصل دوم یا پیشینه پژوهشی یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته تدریس با گرایش تدریس ریاضی در دورهٔ متوسطهٔ اول از گروه ریاضی دانشگاه نبراسکا و به راهنمایی جیم لوئیس است. در این بررسی، پژوهشگر روش‌های مختلف ضرب و علت درست بودن آن‌ها را از نظر ریاضی، بیان کرده است. این مقاله، به خصوص برای همکاران دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول، می‌تواند برای تدریس ریاضی در کلاس درس، مفید واقع شود.

کلیدواژه‌ها: عمل ضرب، انواع روش‌های ضرب، دوره ابتدایی، دورهٔ متوسطهٔ اول

ضرب، یکی از چهار عمل اصلی محاسباتی در دوره ابتدایی است که معمولاً به‌عنوان تکرار جمع تعریف می‌شود. اگرچه این تعریف در ضرب اعداد حسابی به‌کار می‌رود، اما بعضی از پژوهشگران ریاضی بر این باورند که این تعریف، برای تبیین عمل ضرب در کسرها و سایر اعداد، کافی نیست. در عوض، ریاضی‌دانان ترجیح می‌دهند ضرب را به‌عنوان مقیاسی برای بیان یک عدد بر حسب عدد دیگر یا فرایندی که حاصل ضرب دو عدد را محاسبه می‌کند، تعریف کنند (دانشگاه پرینستون وردنت[2]، ۲۰۱۰). با وجود این اختلاف‌نظرها، ضرب با هر تعریفی که در نظر گرفته شود، یکی از مهارت‌های ضروری برای آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی در قرن بیست‌ویکم است. ضرب، ابزاری مهم برای حل مسائل واقعی زندگی است و پایه‌ای محکم، برای استدلال نسبیتی، تفکر جبری و ریاضیات سطوح بالاتر، ایجاد می‌کند.

در آمریکا، الگوریتم استاندارد تدریس ضربِ اعداد بزرگ که به‌عنوان ضرب متوالی[3] شناخته می‌شود، ابتدا توسط مردم عربی‌زبان آفریقا، به اروپا برده شد. در ضرب‌های متوالی، عامل اول[4] در تمام رقم‌های عامل دوم[5]، ضرب می‌شود و تمام عددهای به دست آمده، با هم جمع می‌شوند. این روش، متکی بر به خاطرسپاری حقایق مربوط به ضرب است. با این حال، انواع گسترده‌ای از الگوریتم‌های مؤثر به‌عنوان بدیلی برای این الگوریتم، وجود دارند و بسیاری از دانش‌آموزان، روش‌های جذاب و ساده‌تر را به روش‌های سنتی ترجیح می‌دهند.

ضرب با انگشتان[6]

بعضی از قدیمی‌ترین روش‌های ضرب، استفاده از انگشتان برای محاسبه حاصل‌ضرب بوده است. یکی از این روش‌ها که آن را به ایتالیا نسبت می‌دهند، به‌طور گسترده

در قرون وسطی، در سراسر اروپا مورد استفاده قرار گرفته بود (روس بال[۷]، ۱۹۶۰، ص۱۸۹). این روش بسیار ساده است و می‌تواند برای محاسبه حاصل‌ضرب دو عدد یک رقمی بین پنج و نه، مورد استفاده قرار گیرد. به منظور استفاده از این روش، یک مشتِ بسته شده، نشان‌دهنده عدد پنج است و هر انگشتی که باز می‌شود، یک عدد به آن اضافه می‌کند. یعنی برای نشان دادن اینکه چند انگشت از دست دیگر باز شود، باید اختلاف هر عامل از عدد پنج، به دست آید و به تعداد این اختلاف، انگشتان دست دیگر باز شود. برای مثال، در محاسبه حاصل‌ضرب ۷×۸ ، مراحل زیر انجام می‌شود:

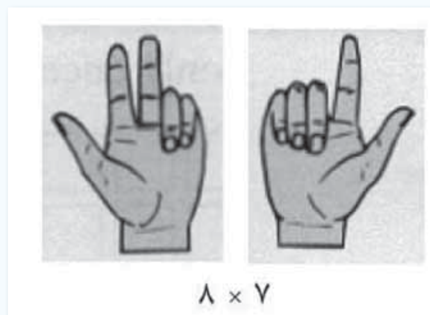
۱. سه انگشت دست چپ را باز کنید. ۳=۵-۸

۲. دو انگشت دست راست را باز کنید. ۲=۵-۷

۳. تعداد انگشتان باز شده را در ۱۰ ضرب کنید. ۵۰=۱۰×۵

۴. حاصل‌ضرب تعداد انگشتان بسته دست راست را در تعداد انگشتان بسته دست چپ، به دست آورید. ۶=۳×۲

۵. دو عدد را با هم جمع کنید. ۵۶=۶+۵۰



بنابراین، ۵۶=۷×۸. اما چرا این الگوریتم نتیجه می‌دهد؟ روند بالا را به‌صورت یک معادله جبری بازنویسی کنید و به جای عددهای هشت و هفت، به ترتیب x و y را جایگزین کنید:

$$۱۰[(x-۵)+(y-۵)]+[(۱۰-x)(۱۰-y)]=$$
$$۱۰x-۵۰+۱۰y-۵۰+۱۰۰-۱۰x-۱۰y+xy=$$
$$\cancel{۱۰x}-۵۰+\cancel{۱۰y}-۵۰+۱۰۰-\cancel{۱۰x}-\cancel{۱۰y}+xy=xy$$

که معنی آن، «ضرب تعداد انگشت‌های باز شده (x-۵,y-۵) در عدد ۱۰ و جمع آن با حاصل‌ضرب انگشت‌های بسته شده (x-۱۰)(y-۱۰)» است. از آنجایی که همه عبارت‌ها به جز xy حذف می‌شوند، معادله مورد نظر، حاصل‌ضرب x و y را نتیجه می‌دهد.

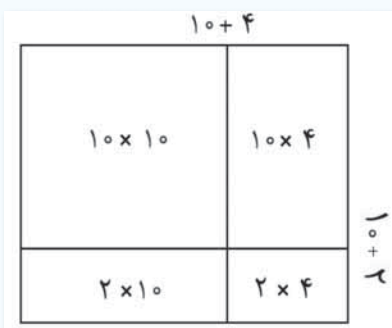
یکی از مزیت‌های این روش این است که نیازی به حفظ کردن حقایق ضرب (ضرب‌های اصلی) بالاتر از ۵×۵ نیست و بدین سبب، برای دانش‌آموزانی که هنوز تسلط کامل در استفاده از جدول ضرب ندارند، روش مؤثری به حساب می‌آید. هم‌چنین، معرفی این روش به دانش‌آموزان پیشرفته‌تر، فرصت توسعه درک و فهم فرایند ضرب و ایجاد ارتباط با یادگیری‌های قبلی را به آن‌ها می‌دهد. استفاده از استدلال ریاضی، برای اعتباربخشی به یک الگوریتم، باعث تقویت درک مفهومی می‌شود که جزء مهمی از مهارت ریاضی محسوب می‌شود (NCTM، ۲۰۰۰).

مدل مساحتی ضرب[۸]

به منظور ساخت مفاهیم جدید، همه دانش‌آموزان باید بین ایده‌های ریاضی و مفاهیمی که قبلاً آموخته‌اند، ارتباط و اتصال ایجاد کنند. مدل مساحتیِ ضرب، روشی است که به‌عنوان یک بازنمایی، فرایند ضرب را توصیف می‌کند و در ایجاد ارتباط بین جبر و تفکر جبری، به دانش‌آموزان کمک می‌کند. ضرب ۱۲×۱۴ را می‌توان به‌عنوان یک مسئله مساحت با رسم یک مستطیل به عرض ۱۲ و طول ۱۴، در کاغذ ساده نشان داد (از کاغذ طراحی نیز برای نمایش قسمت‌های جزئی یا برای ضرب کسرها می‌توان استفاده کرد).

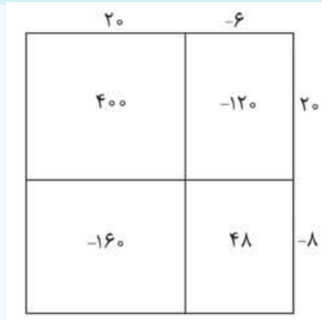
مدل مساحت، کاربردی از خاصیت توزیع‌پذیری[۹] است:

$$۱۴\times۱۲=[(۱۰+۲)\times۱۰]+[(۱۰+۲)\times۴]$$
$$=(۱۰\times۱۰)+(۲\times۱۰)+(۱۰\times۴)+(۲\times۴)$$
$$=۱۰۰+۲۰+۴۰+۸=۱۰۰+۶۰+۸=۱۶۸$$



به دلیل محدودیت‌های مدل مساحتی، نمی‌توان از آن، برای ضرب اعداد گنگ استفاده کرد. اما در هر صورت این مدل، ابزاری مناسب برای کمک به ایجاد درک اساسی در دانش‌آموزان نسبت به مفاهیم گوناگون و پایه‌ای در ریاضی است. برای نمونه، از این مدل می‌توان به‌عنوان ابزاری مؤثر برای توسعه درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی، استفاده کرد. مثال زیر، ضرب ۱۲×۱۴ را به‌صورت (۸-۲۰)×(۶-۲۰) نشان می‌دهد:

این مدل، به وضوح نشان می‌دهد که در ضرب یک عدد منفی در عددی مثبت، حاصل عددی منفی است و حاصل‌ضرب دو عدد منفی، عددی منفی است. هم‌چنین مدل مساحت، خاصیت توزیع‌پذیری ضرب را به خوبی نشان



می‌دهد. اگر فرصتـــی ایجادکنیم تا دانش‌آموزان، بتوانند با استفاده از شکل، نشـــان دهند که ۱۲×۱۴ همان ۱۴×۱۲ اســـت، می‌توان خاصیت جابه‌جایی[10] در ضرب را به خوبی برجســـته کرد. در کلاس‌هایی کـــه دانش‌آموزان قوی‌تری دارد، می‌توان از این روش، برای توسعه درک رابطه‌ایِ ضرب چندجمله‌ای‌ها و فاکتورگیری، در کسانی که یادگیری‌شان بیشتر بصری (دیداری)[11] است، استفاده کرد.

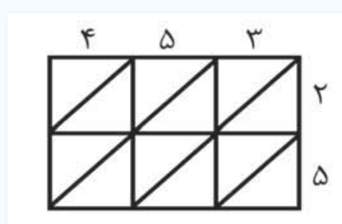
مدل مساحتیِ ضرب، روشی است که به‌عنوان یک بازنمایی، فرایند ضرب را توصیف می‌کند و در ایجاد ارتباط بین جبر و تفکر جبری، به دانش‌آموزان کمک می‌کند

ضرب شبکه‌ای[12]

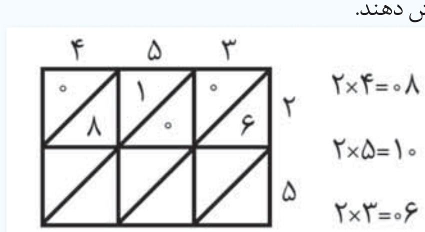
تاریـــخ و مکان پیدایش ضرب شـــبکه‌ای که به ضرب غربال[13] یا روش جالوســـیا[14] معروف است، به قرن دهم در هند می‌رســـد که در قرن چهاردهم، توســـط فیبوناچی به اروپاییان معرفی شد (کارل و پارتر[15]، ۱۹۹۸). الگوریتم این روش مانند روش ضرب‌های متوالی سنتی است، اما فرایند آن، به مراحل کوچک‌تر تقســـیم می‌شـــود. در زیر به‌طور نمونه، مراحل ضرب دو عدد ۴۵۳×۲۵ نشان داده می‌شود:

۱. یک شبکه رسم کنید، به‌طوری که تعداد ستون‌های آن برابر تعداد رقم‌های عامل اول ضرب و تعداد ســـطرهای آن برابر با تعداد رقم‌های عامل دوم ضرب باشد.

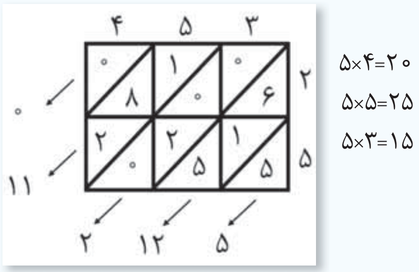
۲. قطر هر شبکه را از گوشه سمت راست بالای شبکه، به گوشه سمت چپ پایین آن رسم کنید.



۳. عامل‌های ضرب را در قســـمت بالا و سمت راست شـــبکه طوری بنویســـید که رقم‌ها سرتاســـر قسمت‌ها را پوشش دهند.



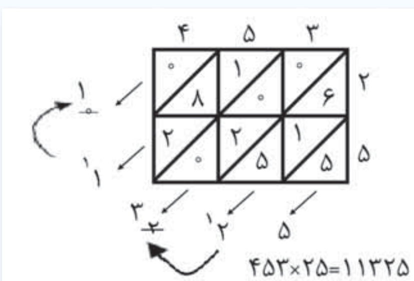
۴. در هر شبکه، حاصل‌ضرب رقم سطر در رقم ستون متناظـــر آن، یک عدد دو رقمی را نشـــان می‌دهد که رقم دهگانِ حاصل‌ضرب در مثلث بالاییِ ســـمت راست و رقم یکانِ حاصل‌ضرب در مثلث پایینیِ سمت چپ قرار می‌گیرد (اگر در حاصل‌ضرب رقم دهگان وجود نداشـــت، در مثلث دهگان، رقم صفر گذاشته می‌شود.)



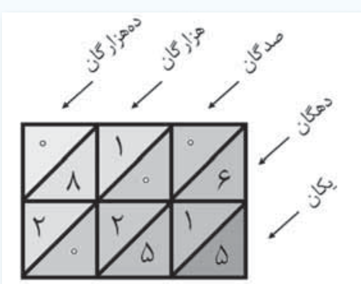
۵. وقتی ضرب‌ها کامل شدند، عددهای امتداد هر قطر را با هم جمع کنید.

۶. عددهـــای دو رقمی را به مکان بعدی ببرید و آن را یادداشت کنید.

بنابراین، ۴۵۳×۲۵=۱۱۳۲۵.



برخی استدلال می‌کنند که این الگوریتم، ارزش مکانی را در نظر نمی‌گیرد، در صورتی که به سادگی می‌توان نشان داد که قطرها در واقع، نشـــان دهنـــده ارزش مکانیِ رقم‌ها هستند.



در نتیجه، می‌توان این ضرب را به‌صورت زیر نمایش داد:

(۲۰×۴۰۰)+(۲۰×۵۰)+(۲۰×۳)+(۵×۴۰۰)+(۵×۵۰)+(۵×۳)=۱۱۳۲۵

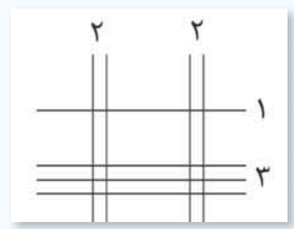
ضرب اعداد بزرگ‌تر از یک رقمی، بر سه مرحله ضرب، دسته بندی دوباره انجام می‌دهد، به‌طوری که دانش‌آموزان می‌توانند بر معنی و مفهوم هر مرحله از فرایند، تمرکز کنند.

این روش، به دانش‌آموزان ساختاری برای فکر کردن و ثبت کارهایشان می‌دهد. ضرب شـــبکه‌ای را می‌توان به راحتی، برای ضرب کسرهای‌اعشاری و چندجمله‌ای‌ها، گسترش داد.

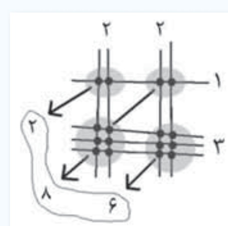
ضرب خطی[۱۷]

یکی دیگــر از الگوریتم‌هایی که گاهی به دانش‌آموزان دوره ابتدایی معرفی می‌شـود، «ضرب خطی» نام دارد. در این الگوریتم، دانش‌آموزان به وسیله یک نمایش تصویری از ضرب، توانایی دیداری خود را از فرایند ضرب، بالا می‌برند. فرض کنید می‌خواهید ۱۳×۲۲ را ضرب کنید:

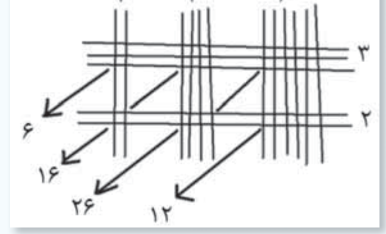
۱. ابتدا دو مجموعه از خطوط عمودی را طوری رسـم کنید که برای نمایش ۲۲، دوخط در سمت راست و دو خط در سمت چپ قرار گیرند (خطوط قرمز). سپس دو مجموعه از خطوط افقی را طوری رسم کنید که برای نمایش ۱۳، یک خط در بالا و سه خط در پایین قرار گیرند (خطوط آبی).



۲. توجه داشــته باشـید که چهار مجموعــه از نقاط تقاطع وجود دارند (برجســته شده‌اند) که برای پیدا کردن حاصل‌ضرب، تعداد نقاط هر مجموعه را بشمارید و به‌صورت قطری، با هم جمع کنید.



مانند الگوریتم ضرب‌های متوالی ، زمانی که یک مسئله ضرب به دســته‌بندی دوباره نیاز دارد، رقم‌ها باید به مکان بعدی انتقال پیدا کننــد. برای مثال، ضرب ۳۲×۲۴۶ را در نظر بگیرید. پاســخ درســت ۶ هزارتایی، ۱۶ صدتایی، ۲۶ ده‌تایی و ۱۲ یکی است. اگر چه عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ باید دوباره دسته‌بندی شوند و پاسخ به‌صورت استاندارد نوشته شود.



نقـــاط تقاطع را به‌صورت قطری بـــا هم جمع کنید و عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ را دوباره دسته بندی کنید.

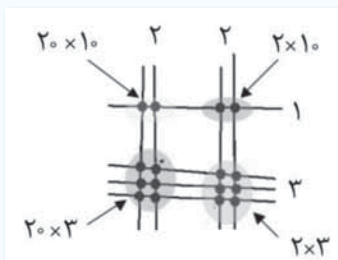
۶۰۰۰+۱۶۰۰+۲۶۰+۱۲=۷۰۰۰+۶۰۰+۲۶۰+۱۲

۷۰۰۰+۸۰۰+۶۰+۱۲=۷۰۰۰+۸۰۰+۷۰+۲

=۷۸۷۲

بنابراین، ۷۸۷۲=۳۲×۲۴۶ .

این روش جواب می‌دهد زیـــرا قطرهایی که از تقاطع خطوط به دست می‌آیند، به‌عنوان ارزش مکانی یا مکان‌یاب (یکان، دهگان، صدگان و . . .) به کار می‌روند و تعداد نقاط در هر تقاطع، نشـــان‌دهنده حاصل‌ضرب تعداد خط‌هاست. این روش، شباهت زیادی به مدل مساحتی ضرب دارد. وقتی دو عدد دو رقمی مانند ۱۳×۲۲ در هم ضرب می‌شوند، باید توجه نمود که مسئله را می‌توان به‌صورت (۳+۱۰)×(۳+۲۰) بازنویسی کرد.

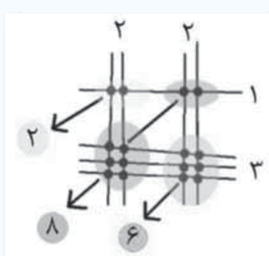


۲۲×۱۳=(۲۰+۲)×(۱۰+۳)

=(۲۰×۱۰)+(۲۰×۳)+(۲×۱۰)+(۲×۳)

=۲۰۰+۶۰+۲۰+۶=۲۰۰+۸۰+۶=۲۸۶

توجه داشته باشـید که چهار مجموعه نقاط به‌صورت قطری با هم جمع می‌شوند. در واقع، نقاطی که ارزش مکانی یکســانی دارند، با هم جمع می‌شــوند (در شکل، برجسته شده‌اند).

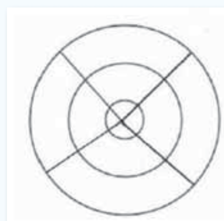


این الگوریتم خاص، فهم دیـــداری یادگیرندگان را از فرایند ضرب، افزایش می‌دهد. با این حال، همه دانش‌آموزان باید با انواع اســـتراتژی‌ها، مدل‌ها و بازنمایی‌ها، آشنا شوند. هم‌چنین، دانش‌آموزان باید توانایی توصیف روش استفاده شده را داشته باشند و بدانند که برای حل هر مسئله خاص، چندین روش مؤثــر برای ضرب، وجــود دارد (NCTM، ۲۰۰۰). ضــرب خطی، می‌تواند به‌عنوان روشـــی برای به دســت آوردن حاصل‌ضرب دو عدد، بــه دانش‌آموزان دوره ابتدایی معرفی شــود. اگر ضرب خطـــی برای اعداد خیلی بزرگ به‌کار رود، دردســـر زاســـت، ولی برای دانش‌آموزان

کم‌ســـن و آن‌هایی که هنوز در جدول ضرب مهارت کافی ندارند، ایـــن روش می‌تواند به‌عنوان فرصتی برای موفقیت در ضرب عددهای نسبتا بزرگ، پیشنهاد شود. دانش‌آموزان پیشرفته‌تر با بررسی این الگوریتم و توجیه ریاضی آن، درک بهتری از فرایند ضرب دو عدد، به دست خواهند آورد.

ضرب دایره/ شعاع[۱۸]

یکی دیگر از الگوریتم‌های تصویریِ ضرب، شامل رسم دایره‌هـــای هم مرکز برای نشـــان دادن عامل اول ضرب، و رسم شعاع برای نشـــان دادن عامل دوم ضرب است. برای مثال در ضرب ۴×۳، ابتدا سه دایره هم مرکز برای نمایش یا مدل‌سازی عامل اول ضرب و چهار شعاع به‌عنوان عامل دوم ضرب، رسم کنید. سپس تعداد قسمت‌های ایجاد شده در دایره را بشمارید. در این مثال، چون ۱۲ قسمت ایجاد شده، نتیجه می‌گیریم که ۱۲=۴×۳.



در مثال زیر که محاســـبه حاصل‌ضرب ۳۴×۲۱ است، نشان می‌دهیم که این الگوریتم برای اعداد بزرگ‌تر، کمی پیچیده است:

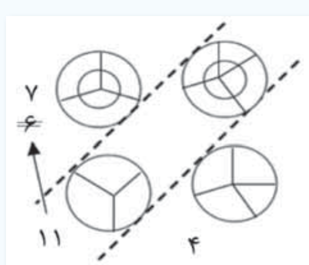
۱. دو دایره هم‌مرکز، برای نشـــان دادن عدد دو که در جایگاه دهگان عاملِ اول ضرب (۲۱) قرار دارد، رسم نموده و همین شکل را به تعداد رقم‌های عامل دوم، رسم کنید.

۲. یک دایره برای نشان دادن عدد یک، که در جایگاه یکان عامل اول ضرب (۲۱) قرار دارد، رسم کنید و این شکل را به تعداد رقم‌های عامل دوم، رسم کنید.

۳. برای ضرب کردن ۳۴، ســـه شـــعاع برای دایره‌های سمت چپ رسم کنید.

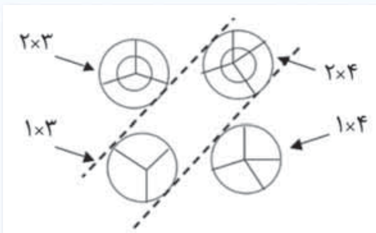
۴. سپس چهار شعاع برای دو دایره سمت راست رسم کنید.

۵. همان‌طور که نمایش داده شـــده (خط چین)، قطر بین دایره‌ها را رســـم کنید و تعداد قسمت‌های هر دایره را بشمارید و به‌صورت قطری، با هم جمع کنید.



جواب، ۷۱۴=۳۴×۲۱ است.

این روش نتیجه می‌دهد، زیرا در آن، دایره‌های نمایش داده شده برای هر رقم در عامل اول، به تعداد رقم‌های عامل دوم تکرار شده‌اند. در واقع، این روش اجازه می‌دهد که همه رقم‌های عامل اول، در همه رقم‌های عامل دوم ضرب شوند. خط‌های قطری نیز برای جـــدا کردن رقم‌ها در مکان‌های مناسب ‑ارزش مکانی‑، به کار می‌روند.



از مزایای این روش این است که می‌توان بدون دانستن جدول ضرب، از آن استفاده کرد. ممکن است این روش ضرب کردن، بدیل مناســـبی برای یادگیرندگانی باشد که توانایی دیداری آن‌ها بیشتر است و بتواند درک عمیق‌تری نسبت به مفهوم ضرب کردن دو عدد، در آنان ایجاد کند. با این وجود، رسم دایره‌ها و شعاع‌ها برای محاسبه حاصل‌ضرب، با افزایش اندازه عامل‌های ضرب، سخت‌تر و سخت‌تر می‌شود، ولی این الگوریتم را می‌توان به‌عنـــوان یکی از چندین روش موجود بـــرای ضرب کردن دو عدد، به دانش‌آموزان معرفی کرد، اما نباید تنها بر این روش، تکیه کنند.

ضرب با نوار کاغذی[۱۹]

یکـــی دیگر از روش‌هایی که برای انجام عملیات ضرب موجود است، نوشتن عددها روی نوارهای کاغذی به‌طوری اســـت که ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌های ضرب را تغییر دهیم و بعد، یک سری ضرب‌های یک‌رقمی انجام دهیم.

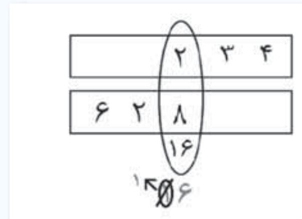
این الگوریتم، می‌تواند برای کســـانی که به استفاده از ابزار ملموس برای فهمیدن ریاضی علاقه دارند، جذاب باشد. برای نشان دادن این روش، ضرب ۶۲۸×۴۳۲ را برای نمونه، نشان می‌دهیم:

۱. ابتـــدا عامل‌هـــای ضـــرب را روی دو نـــوار کاغذی بنویسید، ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌ها را برعکس کنید (۲۳۴→۴۳۲).

۲. نوارهـــای کاغـــذی را طوری قـــرار دهید که عامل برعکس نوشـــته شده، در قسمت بالای سمت راست عامل دیگر قرار گیرد.

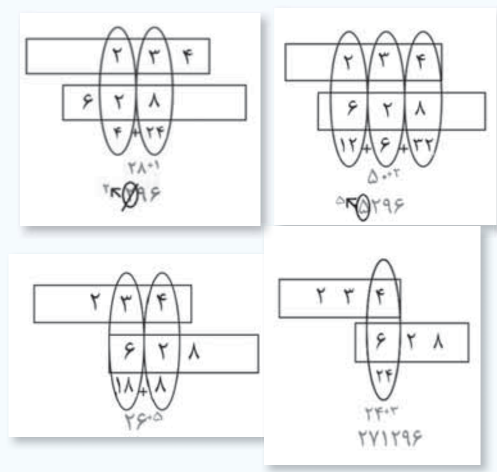
۳. کاغذها را طوری تنظیـــم کنید که اولین رقم عدد جدید بالایی ‑عددی که ترتیب رقم‌هایش عوض شـــده‑ و آخرین رقـــم عدد پایینی، زیر یکدیگر قـــرار گیرند. بعد

حاصل‌ضرب دو رقم را بنویسید.



۴. نوار پایینی را به سمت راست حرکت دهید، به‌طوری که مجموعه‌ای از رقم‌ها زیر هم قرار گیرند. آن‌گاه رقم‌های زیرِ هم را در هم ضرب کنید و حاصل‌ضرب‌ها را جمع کنید و حاصل را بنویسید.

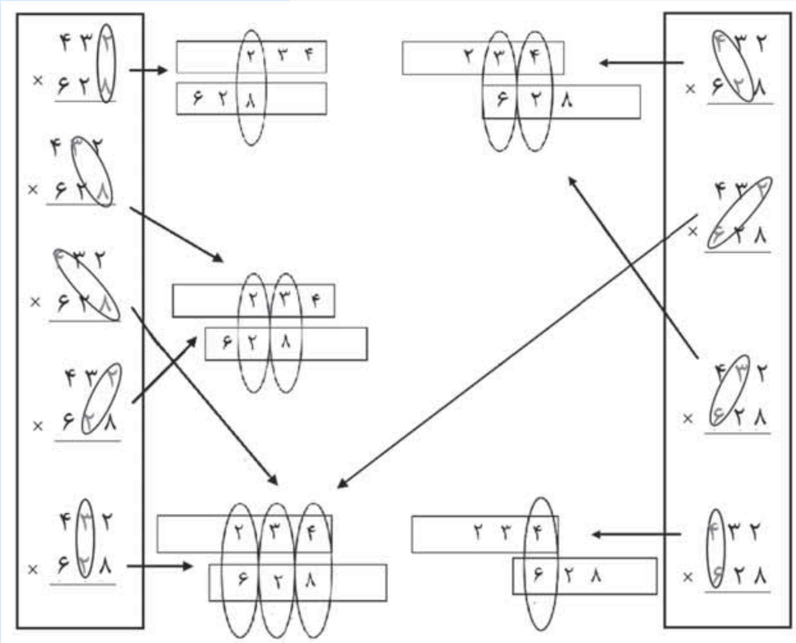
۵. حرکت نوار پایینی را به سمت راست ادامه دهید، رقم‌های زیر هم را در هر مرحله ضرب کنید و حاصل‌ضرب‌ها را جمع کنید. اعداد دورقمی را دوباره دسته‌بندی کنید و این کار را تا زمانی که رقم‌ها زیر هم قرار می‌گیرند، ادامه دهید.



۶. بنابراین ۲۷۲۲۹۶=۶۲۸×۴۳۲ .

اما سؤال این است که چگونه برعکس کردن رقم‌ها همراه با جمع و ضرب آن جفت عددها، به جواب درست می‌رسد؟ بگذارید آنچه را که در مراحل اجرای این الگوریتم اتفاق افتاده است، از نزدیک بررسی کنیم تا ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. ابتدا الگوریتم سنتی ضرب متوالی ۶۲۸×۴۳۲ را در نظر بگیرید.

وقتی که دو روش کنار هم نوشته می‌شوند، معلوم می‌شود که هر دو، یک الگوریتم هستند که ترتیب انجام مراحل عمل ضرب در هر دو روش متفاوت است. ولی چون عمل ضرب و عمل جمع خاصیت جابه جایی دارند، تغییر در ترتیب انجام مراحل، تفاوتی در جواب نهایی ایجاد نمی‌کند.



ضرب مصری[20]

شواهد موجود در رابطه با انجام عملیات ریاضی از جمله ضرب، به ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد برمی‌گردد (اکانر و رابرتسون[21]، ۲۰۱۱). در تمام تمدن‌های مصر باستان، یونان، بابل، هند و چین، روش‌هایی برای انجام عمل ضرب، ابداع کرده بودند. یکی از قدیمی‌ترین الگوهای ضرب، به مصر باستان برمی‌گردد که در آن، نیازی به حفظ کردن جدول ضرب اعداد، وجود ندارد و فقط مبتنی بر توانایی جمع‌کردن و ضرب در عدد دو است. مثال زیر، فرایند ضرب مصری را برای ۴۶×۲۸ نشان می‌دهد.

۱. ابتدا دو ستون از اعداد بسازید، در ستون سمت چپ از عدد ۱ شروع کنید و در ستون سمت راست، یکی از عامل‌های ضرب (معمولاً بزرگ‌ترین عامل) را بنویسید.

۲. فرایند تجزیه عامل دوم ضرب را به توان‌هایی از ۲ شروع کنید، به‌طوری که عددهای دو ستون را دو برابر کنید تا زمانی که بزرگ‌ترین توان ۲ در ستون سمت چپ، کوچک‌تر یا مساوی عامل دوم ضرب شود.

۱	٤٦
۲	۹۲
٤	۱۸٤
۸	۳٦۸
١٦	۷۳٦

یکی دیگر از روش‌هایی که برای انجام عملیات ضرب موجود است، نوشتن عددها روی نوارهای کاغذی به‌طوری است که ترتیب رقم‌های یکی از عامل‌های ضرب را تغییر دهیم و بعد، یک سری ضرب‌های یک‌رقمی انجام دهیم.
این الگوریتم، می‌تواند برای کسانی که به استفاده از ابزار ملموس برای فهمیدن ریاضی علاقه دارند، جذاب باشد

عددهای ســـتون سمت چپ، توان‌های عدد ۲ را نشان می‌دهند. در حالی‌که عددهای ســـتون سمت راست، ۴۶ × توان‌های عدد ۲ را در ســـتون سمت چپ نشان می‌دهند. بزرگ‌ترین توان۲ ≥ ۲۸ برابر است با ۱۶.

۳. عامل دوم ضرب را به توان‌هایی از ۲ تجزیه کنید.

۱۶ بزرگ‌ترین توان ۲ است که کوچک‌تر یا مساوی ۲۸ است. ۱۲=۱۶-۲۸

۱۲، بزرگ‌ترین توان ۲ اســـت که کوچک‌تر یا مساوی ۸ است. ۴=۸-۱۲

۴، بزرگ‌ترین توان ۲ اســـت که کوچک‌تر یا مســـاوی ۴ است.

در نتیجه، ۲۸ حاصل جمع توان‌های ۲، یعنی ۴+۸+۱۶ است.

۴. اعدادی از ستون سمت راست را که توان ۲ نظیرشان در ســـتون ســـمت چپ، در مرحله ۳ به دست آمده، با هم جمع کنید. ۱۲۸۸=۷۳۶+۳۶۸+۱۸۴

پس، ۱۲۸۸=۲۸×۴۶ .

٤٦	١	
٩٢	٢	
١٨٤	٤	•
٣٦٨	٨	•
٧٣٦	١٦	•
١٢٨٨	٢٨	

این مهم است که بدانیم چرا این روش نتیجه می‌دهد. این الگوریتم، بر مبنای خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و توانایی دوباره نوشـــتن حاصل‌ضرب، بر اســـاس توان‌هایـــی از ۲ اســـت. چون اعدادِ ســـتون ســـمت چپ، نشان‌دهندهٔ توان‌های ۲ هستند، می‌توان جدول را به‌صورت زیر، جرح و تعدیل نمود:

٤٦	$٢^{٠} \times ٤٦$	$١ = ٢^{٠}$	
٩٢	$٢^{١} \times ٤٦$	$٢ = ٢^{٠}$	
١٨٤	$٢^{٢} \times ٤٦$	$٤ = ٢^{٢}$	•
٣٦٨	$٢^{٣} \times ٤٦$	$٨ = ٢^{٣}$	•
٧٣٦	$٢^{٤} \times ٤٦$	$١٦ = ٢^{٤}$	•
١٢٨٨		٢٨	

مسئله را بر اساس توان‌هایی از ۲، بازنویسی کنید:

؟؟؟؟؟

معرفی الگوریتم‌های گوناگون ضرب به دانش‌آموزان، باعث بالا بردن درک مفهومی آنان می‌شود و همان‌طور که پژوهش‌گر برجسته آموزش ریاضی لی‌پینگ ما بیان کرده، «وقتی که یک مسئله با روش‌های چندگانه حل می‌شود، می‌توان از آن طریق، چندین بخش از دانش ریاضی را به هم گره زد.»

$$۲۸\times۴۶=(۴+۸+۱۶)\times۴۶$$
$$=(۴\times۴۶)+(۸\times۴۶)+(۱۶\times۴۶)$$
$$=(۲^{۲}\times۴۶)+(۲^{۳}\times۴۶)+(۲^{۴}\times۴۶)$$
$$=۱۸۴+۳۶۸+۷۳۶=۱۲۸۸$$

بـــا وجودی کـــه روش ضرب مصری، شـــامل مراحل بیشتری نسبت به الگوریتم ضرب‌های متوالی است، برتری کلیدی آن برای استفاده‌کنندگان این است که تنها دانستن حاصل ضرب یک عدد در ۲ کافی است. از این گذشته، این روش می‌تواند به‌عنوان داربســـتی برای دانش‌آموزانی عمل کند که هنوز، تسلط کافی در دانستن و به‌کارگیری اصول پایـــه‌ای ندارند. هم‌چنین این الگوریتم، می‌تواند به گونه‌ای در کلاس درس معرفی شـــود کـــه دانش‌آموزان را به بحث در مورد مفهوم ضرب، فراینـــد و چرایی اجرای آن هدایت کند. برای مثال، دانش‌آمـــوزان می‌توانند این روش ضرب و روش ضرب‌های متوالی ســـنتی را با هم مقایسه کنند و چگونگی رسیدن به پاسخ درست را در هر دو روش، توضیح دهند. معرفی الگوریتم‌های گوناگون ضرب به دانش‌آموزان، باعث بالا بردن درک مفهومی آنان می‌شود و همان‌طور که پژوهش‌گر برجسته آموزش ریاضی لی‌پینگ ما[۲۲] (۱۹۹۹، ص ۱۱۲) بیان کرده، «وقتی که یک مســـئله با روش‌های چندگانه حل می‌شود، می‌توان از آن طریق، چندین بخش از دانش ریاضی را به هم گره زد.»

روش «ضرب دهقان روسی»[۲۳]

این روش، نوعی از الگوریتم ضرب مصری است که به دهقانان نزدیک به روسیه مرتبط می‌شود و هنوز در برخی از مناطق، از آن استفاده می‌شود (بوگومولنی[۲۴]، ۲۰۱۱). این روش، شـــامل فرایند نصف کردن و دوبرابر کردن است، که یکی از عامل‌های ضرب را بر اســـاس توان‌هایی از ۲ کاهش می‌دهد و از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نســـبت به جمع، برای به دســـت آوردن حاصل‌ضرب استفاده می‌کند. مانند روش مصـــری، فرایند ضرب با مرتب کـــردن اعداد در دو ستون شروع می‌شود. در مثال زیر، ضرب ۲۸×۴۶ مبتنی بر فرایند «ضرب دهقان روسی»، نشان داده شده است:

۱. در زیرِ هر یک از عامل‌های ضرب، یک ســـتون در نظر بگیرید.

۲. به‌طور مکرر، عدد ستون سمت چپ را آن‌قدر نصف کنید و باقیمانده‌های تقســـیم را حـــذف کنید تا به عدد ۱ برسید.

۳. به‌طور مکرر، عدد ستون سمت راست را در دو ضرب کنید.

۴. ســـطرهایی را که در ستون ســـمت چپ عدد زوج دارند، حذف کنید.

~~۲۸~~	~~۴۶~~
۵۶	۲۳
۱۱۲	۱۱
۲۲۴	۵
~~۴۴۸~~	~~۲~~
۸۹۶	۱
۱۲۸۸	

۵. عددهای حذف نشده در ستون سمت راست را با هم جمع کنید تا حاصل‌ضرب به دست آید.

۵۶+۱۱۲+۲۲۴+۸۹۶=۱۲۸۸

بنابراین، ۱۲۸۸=۲۸×۴۶.

دلایل توجیه این الگوریتم، تقریباً مانند روش مصری است، اما بگذارید از یک دیدگاه کمی متفاوت به آن نگاه کنیم. در واقع، اینکه هر دو رویه، وابسته به ضرب در ۲ یا تقسیم بر ۲ هستند، نشان می‌دهد که هر دو روش، مبتنی بر مبنای دو[25] است. ابتدا نمایش عدد ۴۶ را در مبنای ۲، با استفاده از مراحل زیر، به دست آورید:

۱. فهرستی از توان‌های ۲ را در جدولی از راست به چپ تهیه کنید که با 2^0 شروع شود و توان‌ها به ترتیب، یکی یکی افزایش یابند.

۲. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد ۴۶ مناسب است، پیدا کنید، چون ۳۲ برای عدد ۴۶ مناسب است، در انتهای سمت چپ جدول و در قسمت نمایش در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. ۳۲ را از ۴۶ کم کنید که ۱۴ می‌شود.

۳. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد ۱۴ مناسب است، پیدا کنید. چون عدد ۱۶ برای ۱۴ مناسب نیست، برای دومین رقم در مبنای دو، عدد صفر را بنویسید.

۴. عدد ۸ برای ۱۴ مناسب است بنابراین برای سومین رقم در مبنای دو، عدد یک را بنویسید. عدد هشت را از ۱۴ کم کنید که ۶ می‌شود.

۵. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد ۶ مناسب است، پیدا کنید، چون ۴ برای عدد ۶ مناسب است، برای چهارمین رقم در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. عدد ۴ را از ۶ کم کنید که ۲ می‌شود.

۶. بزرگ‌ترین توانی از ۲ را که برای عدد دو مناسب است، پیدا کنید، چون ۲ (توانی از دو) برای عدد ۲ (یک عدد اعشاری) مناسب است، برای رقم بعدی در مبنای دو، عدد ۱ را بنویسید. عدد ۲ را از دو کم کنید تا باقی‌مانده صفر شود.

۷. چون صفر، هیچ توانی از ۲ نیست، برای رقم باقی‌مانده در مبنای ۲ ، عدد صفر را قرار دهید.

سپس دو ستون دیگر از اعداد، به جدول اصلی اضافه

توان‌های دو	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
نمایش در مبنای ۱۰	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱
نمایش در مبنای دو	۱	۰	۱	۱	۱	۰

کنید که یکی توان‌های عدد ۲ و دیگری رقم‌های عدد ۴۶ را در مبنای دو ولی به‌صورت برعکس، نشان دهد.

~~۲۸~~	~~۴۶~~	۰×۱	۰
۵۶	۲۳	۱×۲	۱
۱۱۲	۱۱	۱×۴	۲
۲۲۴	۵	۱×۸	۳
~~۴۴۸~~	~~۲~~	۱×۱۶	۴
۸۹۶	۱	۱×۳۲	۵
۱۲۸۸			

با اضافه شدن دو ستون، به وضوح می‌توان ارتباط بین این الگوریتم و نمایش اعداد در مبنای دو را دید:

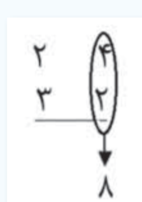
$$46=(101110)_2=(1\times2^5)+(0\times2^4)+(1\times2^3)+(1\times2^2)+(1\times2^1)+(0\times2^0)=32+8+4+2$$

با توجه به اینکه رقم‌های نمایش داده شده در مبنای دو، باقیمانده تقسیم را بر توان‌های ۲ نشان می‌دهند، ۱ با اعداد فرد در ستون عدد ۴۶ و صفر با اعداد زوج متناظر است. بنابراین، تنها ردیف‌هایی با عددهای فرد، در به دست آوردن حاصل‌ضرب، نقش دارند.

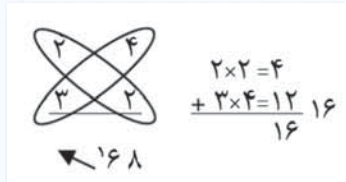
ضرب هندی[26]

ریاضیات هندی، ریشه در هند باستان دارد که در متون کهن هندی، برای اولین بار در حدود ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد، به زبان سانسکریت نوشته شده است. رهبر روحانی و ریاضی‌دان هندی، سِری بهاراتی کرشنا تیرتاجی[27]، ۱۶ اصل بنیادی را که سوترا[28] نامیده می‌شوند، از این متون کهن به دست آورده است. سوترا دارای حدود ۱۳ زیر مجموعه است که مبنای دستگاه شمار ریاضیات هندی را تشکیل می‌دهند (ناتاراج و توماس[29]، ۲۰۰۶). ضرب هندی، یک الگوی ساده و کارآمد برای محاسبات ذهنی است. به‌عنوان مثال، برای ضرب ۲۴×۳۲، از سوتراهای عمودی و ضربدری[30]، استفاده شده است:

۱. برای به دست آوردن رقم یکان حاصل‌ضرب، رقم‌های سمت راست را به‌صورت عمودی ضرب کنید.

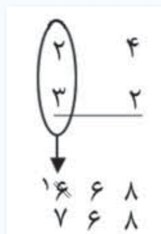


۲. به‌صورت ضربدری عددهـــا را در هم ضرب کنید و حاصل را جمع کنید:



ایـــن عدد، رقم دهگان حاصل‌ضرب را نشـــان می‌دهد (توجه داشته باشید که عدد ۱، باید به مکان صدگان انتقال پیدا کند.)

۳. رقم‌های ســـمت چپ را به‌صـــورت عمودی ضرب کنید، و حاصل را با عددهای انتقال یافته جمع کنید تا رقم صدگان حاصل‌ضرب، به دست آید.



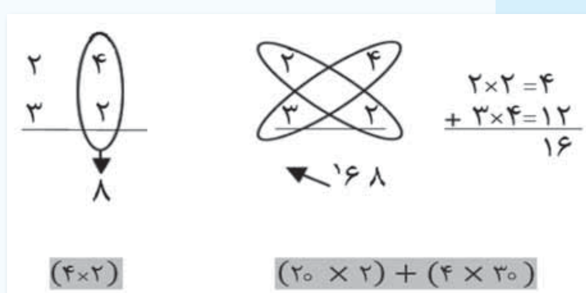
بدین ترتیب، ۷۶۸=۳۲×۲۴.

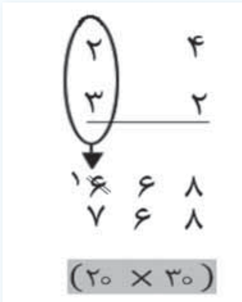
این الگوریتم، می‌تواند برای ضرب‌های ذهنی در کلاس درس معرفی شـــود. حل مســـائلی که نیاز به انجام مراحل ضرب دارد، ممکن اســـت برای دانش‌آموزان خسته‌کننده باشد و دانش‌آموزان به سادگی دچار اشتباه می‌شوند.

دانش‌آموزان دوره اول و دوم دبیرســـتان از این روش ســـاده و میان‌بر، برای یافتن حاصلضرب استفاده می‌کنند و آن‌ها ممکن اســـت توانایی محاسبه ذهنی حاصل‌ضرب را کســـب کنند. اجازه دهید نگاه عمیق‌تری به شـــیوه کار کردن این روش داشـــته باشیم. ابتدا با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب مسئله قبل را دوباره می‌نویسیم:

۲۴×۳۲=(۲۰+۴)(۳۰×۲)
=(۲۰×۳۰)+(۲۰×۲)+(۴×۳۰)+(۴×۲)
=۶۰۰+۴۰+۱۲۰+۸=۶۰۰+۱۶۰+۸
=۷۰۰+۶۰+۸=۷۶۸

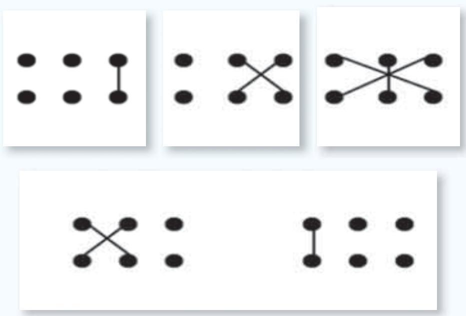
توجه داشته باشـــید که قسمت‌های برجسته شده در مسئله با الگوهای عمودی و ضربدری در ارتباط هستند.



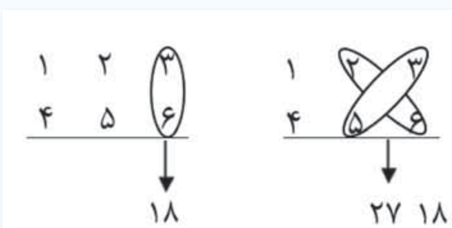


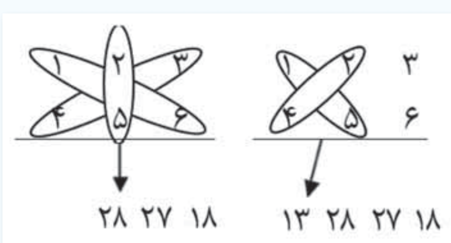
این الگوریتم بر مبنای خاصیـــت توزیع‌پذیری ضرب می‌باشد.

در ضرب اعـــداد بزرگ‌تر، به همان الگـــوی قبلی، دو مجموعـــه ضرب ضربـــدری اضافه می‌شـــود، از الگوی زیر استفاده کنید:

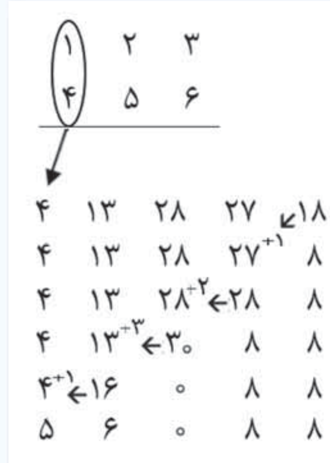


برای مثال در ضرب ۱۲۳×۴۵۶، ضرب و جمع نمایش داده شده اســـت، در مرحله آخر اعداد بزرگ‌تر از ۹، دوباره دسته‌بندی شده‌اند.





بنابراین، ۵۶۰۸۸=۴۵۶×۱۲۳.



نتیجه‌گیری

ضرب یک مهارت پایه ریاضی است، و درک فرایند و بیشتر کاربردهای آن اصل مهمی برای موفقیت آینده دانش‌آموزان امروزی است. با توجه به رشد بالای آموزش، انتظار می‌رود همه دانش‌آموزان راه و روش‌های یکسان برای آموزش را یاد بگیرند. آموزشگران باید به‌طور گسترده آماده‌گی پاسخ‌گویی به نیازهای متنوع و منحصربه‌فرد دانش‌آموزان، در کلاس درس را داشته باشند. پژوهش‌ها نشان داده زمانی که روش‌ها و راهبردهای گوناگون حل مسئله به کودکان معرفی می‌شود، توانایی‌های حل مسئله در آن‌ها مبتکرانه و منعطف‌تر می‌شود (NCTM، ۲۰۰۰). وقتی دانش‌آموزان درباره تاریخچهٔ گسترش ایده‌های ریاضی اطلاعات به دست می‌آورند به احتمال زیاد آن‌ها ریاضی را به‌عنوان نظم روبه رشدی در نظر خواهند گرفت، در حالی که دیگران از آن به‌عنوان روش مؤثر در محاسبه مسائل پیچیده استفاده می‌کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. West, Lynn. (July 2011). University of Bellevue, Nebraska. Unpublished MA thesis.
2. Princeton University Wordnet
3. long Multiplication
4. Multiplicand
5. Multiplier
6. Finger Multiplication
7. Rouse Ball
8. Area Model of Multiplication
9. Distributive Property
10. Commutative Property
11. Visual Learners
12. Lattice Multiplication
13. Sieve Multiplication
14. Jalousia (Gelosia)
15. Carroll & Porter
16. Regrouping
17. Line Multiplication
18. Circle/Radius Multiplication
19. Paper Strip Multiplication
20. Egyptian Multiplication
21. O'Connor & Robertson
22. Laping Ma
23. Russian Peasant Multiplication
24. Bogomolny
25. Binary System
26. Vedic Multiplication
27. Sri Bharati Krsna Tirthaji
28. Sutra
29. Nataraj & Thomas
30. Vertically and Crosswise Sutra

منابع

1. Bogomolny, A. (2011). Peasant multiplication. Retrieved June 10, 2011, from www.cut-the-knot.org
2. Carroll, W. M., & Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. In The National Council of Teachers of Mathematics, The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 106-114). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
3. Gray, E. D. (2001). Cajun multiplication: A history, description, and algebraic verification of a peasant algorithm. Louisiana Association of Teachers of Mathematics Journal, 1(1), article 6. Retrieved fromhttp://www.lamath.org/journal/Vol1/cajunmultiplicationfinal.pdf
4. Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
5. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
6. Nugent, P. M. (2007, September). Lattice multiplication in a preservice classroom. Mathematics Teaching in the Middle School, 13(2), 110-113.
7. O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2011). An overview of the history of mathematics. In The MacTutor history of mathematics archive. Retrieved June 9, 2011, from School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew Scotland website:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk
8. Princeton University "About WordNet" (2010). Retrieved June 9, 2011, from http://wordnet.princeton.edu
9. Rouse Ball, W. W. (1960). A short account of the history of mathematics (4th ed.). Mineola, NY: Dover Publications, Inc. (Original work published 1908)
10. Rubenstein, R. N. (1998). Historical algorithm. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 99-105). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
11. Saraswathy Nataraj, M., & Thomas, M. O. (2006). Expansion of binomials and factorization of quadratic expressions: Exploring a Vedic method. Australian Senior Mathematics Journal, 20(2), 8-17.
12. Sgroi, L. (1998). An explanation of the Russian peasant method of multiplication. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 81-85). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics,